全国研究高考指导复习权威期刊

中学课程辅导 高考

语数外

2019.3

高三

语文： 小说阅读之分析人物作用

数学： 数列高考二轮复习指津

英语： 高考语法考点专项练习题

ISSN 1992-7711

教育部南京师范大学基础教育课程研究中心
江苏省中小学教师培训学会

中学课程辅导 高考

（高三语数外）

2019年3月（总第123期）

主　管：山西省教育厅
主　办：山西教育教辅传媒集团有限责任公司
协　办：教育部南京师范大学基础教育课程研究中心
江苏省中小学教师培训学会

社　址：山西省太原市并州北路91号
金港大厦B座2201室
电　话：(0351)4727214
江苏联络地址：江苏省南京市北京西路15-2号
教育厅大院1号楼
电　话：(025)83345311

网　站：http://www.jsjspx.com
电子信箱：zxkcfdgkyw@163.com（语文）
zxkcfdgksx@163.com（数学）
zxkcfdgkyy@163.com（英语）

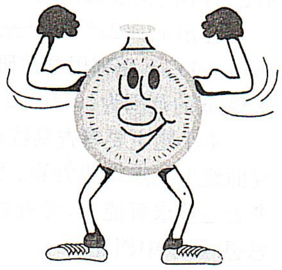
国际标准刊号：ISSN 1992-7711
国内统一刊号：CN 14-1307/G4
邮发代号：22-310
广告经营许可证：晋1400004000015

刊名题字：季　公
法律顾问：江苏冠文律师事务所
印　刷：南京北极印刷厂
发行范围：国内外公开
出版日期：每月10日
定　价：7.00元

目录 Contents

·语文·

·数学·



高考二轮复习过程中的思考

——函数与导数

□ 钱德秦

函数是高中数学的核心内容，函数的思想方法贯穿高中数学的始终，是历年高考考查的重点和热点. 利用函数图象理解和研究函数的性质，理解指数函数、对数函数的图象和性质. 导数的应用是考查的重点，是近年命题的热点，是命题的一种重要载体，命题往往侧重于对函数的单调性和奇偶性、极值、最值的考查，侧重于导数的综合应用，即函数与导数、不等式、方程、数列、解析几何的综合等. 下表是从 2008 年至 2018 年江苏高考中导数题的考查情况汇总.

年份	填空题	解答题	备　注
2008	8,14	17	8. 导数的几何意义；14. 三次函数求参数；17. 三角函数求导应用
2009	3,9		3. 三次函数单调区间；9. 导数几何意义
2010	8	20	8. 导数几何意义；20. 简单求导
2011	12	17,19	12. 导数几何意义；17. 导数应用题；19. 求导
2012	14	18	14. 导数的几何意义；18. 导数的应用和论证
2013		20	20. 导数的应用和论证
2014	11	19	11. 导数几何意义；14. 导数的应用和超越方程根的讨论
2015		17,19	17. 导数应用题；19. 三次函数零点问题
2016		17,19	17. 导数的应用；19. 指数型函数零点问题
2017		20	20. 三次函数的极值点与拐点
2018	11	19	11. 三次函数零点问题；19. 导数在研究函数中的应用

通过上表我们可以看出导数作为工具性知识，在高考中愈来愈显重要. 函数综合题中，极值点问题常通过"导函数"的正负性解决，零点问题常(在单调的前提下)通过"函数"的正负性解决. 而函数的产生，常常是构造出来的，这里超越方程或不等式可以转化为超越函数，类似于二次方程、不等式、函数之间的关系.

函数与方程思想、转化与化归思想是高中数学思想中比较重要的两大思想，而构造函数的解题思路恰好是这两种思想的良好体现，尤其是在导数题型中. 在导数小题中构造函数的常见结论：出现 $nf(x)+xf'(x)$形式，构造函数 $F(x)=x^nf(x)$；出现 $xf'(x)-nf(x)$形式，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$；出现 $f'(x)+nf(x)$形式，构造函数 $F(x)=e^{nx}f(x)$；出现 $f'(x)-nf(x)$形式，构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{nx}}$.

现对函数与导数在高考中的常见的几种类型作如下归类.

一、切线问题

题型 1　求曲线 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的切线方程.

方法：$f'(x_0)$为在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.

题型 2　过点(a,b)的直线与曲线 $y=f(x)$的相切问题.

方法：设曲线 $y=f(x)$的切点为$(x_0,f(x_0))$，将点(a,b)代入切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，求出 x_0，进而解决相关问题.

注意：曲线在某点处的切线若有则只有一条，曲线过某点的切线可以不止一条.

例题：已知函数 $f(x)=x^3-3x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点 $x=2$ 处的切线方程.(答案：$9x-y-16=0$)

(2)若过点 $A(1,m)(m\neq-2)$可作曲线 $y=f(x)$的三条切线，求实数 m 的范围.

解析：(1)先求导数 $f'(x)=3x^2-3$，欲求出切线方程，只需求出其斜率即可，故先利用导数求出在 $x=2$ 处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率. 从而问题解决.

(2)先将过点 $A(1,m)(m\neq-2)$可作曲线 $y=$

$f(x)$的三条切线转化为：方程 $2x^3-3x^2+m+3=0$ 有三个不同实数根，

记 $g(x)=2x^3-3x^2+m+3$，$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，下面利用导数研究函数 $g(x)$的零点，从而求得 m 的范围为$(-3,-2)$.

本小题主要考查函数单调性的应用、利用导数研究曲线上某点切线方程、不等式的解法等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想. 属于中档题.

题型 3 求两个曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$的公切线.

方法：设曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$的切点分别为$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,g(x_2))$，建立 x_1,x_2 的等量关系式 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，$y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)$，利用这两条切线重合，由待定系数法求出 x_1,x_2，进而求出切线方程. 解决问题的方法是设切点，用导数求斜率，建立等式关系.

例 求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=2e\ln x$ 的公切线方程.

解析：曲线 $y=x^2$ 在(x_1,x_1^2)处的切线方程为 $y=2x_1x-x_1^2$，曲线 $y=2e\ln x$ 在$(x_2,2e\ln x_2)$处的切线方程为 $y=\dfrac{2e}{x_2}x+2e(\ln x_2-1)$，两条切线重合时即为公切线，所以解方程组 $\begin{cases}2x_1=\dfrac{2e}{x_2}\\-x_1^2=2e(\ln x_2-1)\end{cases}$ 得到 x_1,x_2 的值，从而求出公切线方程为 $2\sqrt{e}x-y-e=0$.

二、单调性问题

题型 1 求函数的单调区间.

求含参函数的单调区间的关键是确定分类标准，分类的方法有：(1)在求极值点的过程中，未知数的系数与 0 的关系不定而引起的分类；(2)在求极值点的过程中，有无极值点引起的分类(涉及到二次方程问题时，判别式与 0 的大小关系不定)；(3)在求极值点的过程中，极值点的大小关系不定而引起的分类；(4)在求极值点的过程中，极值点与区间的相对位置关系不定而引起分类等. 注意分类时必须从同一标准出发，做到不重复，不遗漏.

例 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间.

(2)若 $x\in[2,e]$，求函数 $f(x)$的单调区间.

解析：(1)利用极值点的大小关系分类：

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$，$(x>0)$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；

当 $0<a<1$ 时，$x\in(0,a)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；$x\in(a,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$为增函数；

当 $a>1$ 时，$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；$x\in(1,a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；

综上可知：当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(0,1)$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(a,1)$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，$(a,+\infty)$，单调递减区间为$(1,a)$.

(2)利用极值点与区间的相对位置关系分类：

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$，$(x>0)$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=a$，

当 $a\leqslant 2$ 时，$x\in[2,e]$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；

当 $2<a<e$ 时，$x\in[a,e]$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；$x\in[2,a]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当 $a\geqslant e$ 时，$x\in[2,e]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

综上可知：当 $a\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$[2,e]$，无单调递减区间；

当 $2<a<e$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$[a,e]$，单调递减区间为$[2,a]$；

当 $a\geqslant e$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为$[2,e]$，无单调递增区间.

题型 2 已知函数在某区间内单调，求参数的范围问题.

方法 1：研究导函数讨论.

方法 2：转化为 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 在给定区间上恒成立问题.

方法 3：利用子区间(即子集思想)，首先求出函数的单调增区间或减区间，然后让所给区间是已求的增或减区间的子集.

注意：“函数 $f(x)$在区间(m,n)上是减函数”与“函数 $f(x)$的单调减区间是(a,b)”的区别是前者是后者的子集.

例 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x+\frac{2}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调递增函数，求实数 a 的取值范围.

解析：$f'(x)=2x+\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3+ax-2}{x^2}$，

即 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=2x^3+ax-2$，则 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{2}{x}-2x^2$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，令 $g(x)=\frac{2}{x}-2x^2$，易知 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，$\therefore a\geqslant 0$.

题型 3 已知函数在某区间上不单调，求参数的范围问题.

方法 1：正难则反，研究在某区间上单调.

方法 2：研究导函数的零点问题，再检验.

方法 3：直接研究不单调，分情况讨论.

例 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$a\in\mathbf{R}$，在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内不单调，求实数 a 的取值范围.

分析：从反面入手，可假设 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内单调，

若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内单调递增，则 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时不等式 $f'(x)=3x^2+2ax+1\geqslant 0$ 恒成立，解得 $a\geqslant-\sqrt{3}$，

若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内单调递减，则 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时不等式 $f'(x)=3x^2+2ax+1\leqslant 0$ 恒成立，解得 $a\leqslant-2$，

所以函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$a\in\mathbf{R}$，在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内不单调时，实数 a 的取值范围为 $(-2,-\sqrt{3})$.

三、极值、最值问题

题型 1 求函数极值、最值.

基本思路：定义域——疑似极值点——单调区间——极值——最值

例 已知函数 $f(x)=e^x\cdot x-(k+1)e^x-\frac{1}{2}x^2+kx+1$，求在 $x\in(-1,2)$ 的极小值.

解析：利用极值点的大小关系和极值点与区间的相对位置关系分类，解题时要仔细分析 k 的取值对函数极小值的影响.

解：$f'(x)=e^x\cdot x+e^x-(k+1)e^x-x+k$

$=(e^x-1)(x-k)$，

令 $f'(x)=0$ 得到两根分别为 0、k.

当 $k\leqslant-1$ 时，$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，

此时函数在 $x=0$ 取得极小值 $f(0)=-k$，

当 $k\geqslant 2$ 时，$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，此时函数无极小值.

当 $-1<k<0$ 时，$x\in(-1,k)$ 和 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(k,0)$ 时，$f'(x)<0$，

此时函数极小值为 $f(0)=-k$.

当 $0<k<2$ 时，$x\in(-1,0)$ 和 $x\in(k,2)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(0,k)$ 时，$f'(x)<0$，

此时函数极小值为 $f(k)=\frac{1}{2}k^2+1-e^k$，

当 $k=0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，无极小值.

综上：当 $k<0$ 时，极小值为 $f(0)=-k$，

当 $0<k<2$ 时，极小值为 $f(k)=\frac{1}{2}k^2+1-e^k$，

当 $k\geqslant 2$ 或 $k=0$ 时，无极小值.

题型 2 已知函数极值，求系数值或范围.

方法 1：将导函数零点问题转化为方程解问题，求出参数，再检验.

方法 2：转化为函数单调性问题.

例 函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(1-p)x^3-\frac{1}{2}px^2-p(1-p)x+1$，$0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，求实数 p 的值.

解析：先求出函数 $f(x)$ 的导函数，然后由极值的定义知 $f'(0)=0$.

$f'(x)=x^3+(1-p)x^2-px-p(1-p)$，把 $x=0$ 代入得 $p=0$ 或 1.

检验：当 $p=0$ 时，$f'(x)=x^3+x^2=x^2(x+1)$，在 $x=0$ 的左右两侧，导数均大于 0，即 $x=0$ 不是极值点，所以 $p=0$ 舍去. 又当 $p=1$ 时满足题意. 所以 $p=1$.

题型 3 已知最值，求系数值或范围.

方法 1：直接求最值.

方法 2：转化为恒成立，求出范围，再检验.

例 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^3-3x^2$，若函数 $g(x)=f(x)+f'(x)$，$x\in[0,2]$，在 $x=0$ 处取得最大值，求 a 的取值范围.

解析：由题设 $g(x)=ax^3-3x^2+3ax^2-6x$

$=ax^2(x+3)-3x(x+2)$.

当 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(0)$ 时，$g(0)\geqslant g(2)$，即 $0\geqslant 20a-24$，故得 $a\leqslant\frac{6}{5}$.

反之当 $a\leqslant\frac{6}{5}$ 时对任意 $x\in[0,2]$，

$g(x)=\frac{6}{5}x^2(x+3)-3x(x+2)$

$=\frac{3}{5}x(2x+5)(x-2)\leqslant 0$，

而 $g(0)=0$，故 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(0)$.

综上，a 的取值范围为$(-\infty,\frac{6}{5}]$.

四、不等式恒成立(或存在性)问题

方法：

1. 若函数 $f(x)$ 的值域为(m,n)，$a>f(x)$恒成立，则 $a\geqslant n$；

2. 对$\forall x_1\in(m,n)$，$\forall x_2\in(m,n)$，$f(x_1)\geqslant g(x_2)$恒成立，则 $f(x_1)_{\min}\geqslant g(x_2)_{\max}$；

3. 对$\exists x_1\in(m,n)$，$\exists x_2\in(m,n)$，$f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，则 $f(x_1)_{\max}\geqslant g(x_2)_{\min}$；

4. 对$\forall x_1\in(m,n)$，$f(x_1)\geqslant g(x_1)$恒成立，转化为 $f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0$ 恒成立；

5. 对$\exists x_1\in(m,n)$，$\forall x_2\in(m,n)$，$f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，则 $f(x_1)_{\max}\geqslant g(x_2)_{\max}$；

6. 对 $x_1\in(m,n)$，$x_2\in(m,n)$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geqslant a$ 成立，则构造函数 $t(x)=f(x)-ax$，转化为 $t(x)$ 在(m,n)上是单调增函数.

题型1 已知不等式恒成立，求系数范围.

方法：(1)分离参数法：求最值时，若要用罗比达法则，则应放弃这个解法. 研究单调性时，或多次求导.

例 函数 $f(x)=e^x(x^2-\ln x)+a\geqslant e$ 在 $x\in[1,e]$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析：方法：分离法，多次求导.

由题意可得 $e-a\leqslant e^x(x^2-\ln x)$在 $x\in[1,e]$上恒成立，令 $g(x)=e^x(x^2-\ln x)$，

则 $e-a\leqslant g(x)_{\min}$，

$g'(x)=e^x(x^2-\ln x+2x-\frac{1}{x})$，令 $h(x)=x^2-\ln x+2x-\frac{1}{x}$则$h'(x)=2x-\frac{1}{x}+2+\frac{1}{x^2}$，

$h''(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$，显然 $h''(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$在 $x\in[1,e]$大于0恒成立，

所以$h'(x)=2x-\frac{1}{x}+2+\frac{1}{x^2}$在 $x\in[1,e]$上单调递增，所以 $h'(x)\geqslant h'(1)=4>0$ 恒成立，

所以 $h(x)=x^2-\ln x+2x-\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,e]$上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=2>0$ 恒成立，

即 $g'(x)>0$ 恒成立，所以 $g(x)$在 $x\in[1,e]$上单调递增，

所以 $e-a\leqslant g(x)_{\min}=g(1)=e$，即实数 a 的取值范围为$[0,+\infty)$.

(2)讨论法：有的需要构造函数，关键确定讨论标准.

例 设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$，若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析：本题考查函数恒成立问题，考查导数知识的运用，考查分类讨论、转化与化归解题思想及其相应的运算能力.

令 $g(x)=e^x-1-x$，$g'(x)=e^x-1$，

当 $x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$，$\therefore e^x\geqslant 1+x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

$\because f'(x)=e^x-1-2ax$，

$\therefore f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x$，

从而当 $1-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0$，$(x\geqslant 0)$，而 $f(0)=0$，

于是当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

由 $e^x>1+x,(x\neq 0)$可得 $e^{-x}>1-x,(x\neq 0)$

从而当 $a>\frac{1}{2}$时，$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$，

故当 $x\in(0,\ln 2a)$时，$f'(x)<0$，而 $f(0)=0$，于是当 $x\in(0,\ln 2a)$时，$f(x)<0$.

综合得 a 的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$.

(3)数形结合：数形结合解不等式恒成立问题的步骤：①不等式等价变形；②把不等式两端的式子分别看成两个函数(其中一个函数的图象为直线)；③利用导数研究函数的单调性，极值、最值，图象的凹凸性；④画出两个函数图象；⑤根据不等式关系和图形的位置关系，列式求解. 注意不能在解答题中使用.

例 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$，若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求$(a+1)\cdot b$ 的最大值.

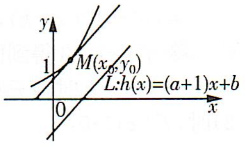
解：$f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2\Rightarrow f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$，

令 $x=1$ 得：$f(0)=1\Rightarrow f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\frac{1}{2}x^2$，令 $x=0$ 得 $f(0)=f'(1)e^{-1}=1$ 解得 $f'(1)=e$，

故函数的解析式为 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$.

(变形)又 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow e^x\geqslant(a+1)x+b$.

(设函数)设 $g(x)=e^x$，$h(x)=(a+1)x+b$.



(画函数图象)$g(x)=e^x$的图象是过(0,1)的曲线 C，曲线 C 随着 x 的增大，y 值增大且图象下凹. $h(x)=(a$

$+1)x+b$ 的图象是过点 $(0,b)$ 且斜率为 $a+1$ 的直线 l,如图.

(列式求解)因为 $e^x\geqslant(a+1)x+b$,所以曲线 C 必在直线 l 的上方或曲线 C 与直线 l 相切.

设曲线 C 与直线的 l 切点为 $M(x_0,y_0)$,曲线 C 在点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $l:y=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0)$,切线的斜率为 e^{x_0},在 y 轴上的截距为 $e^{x_0}(1-x_0)$,又因为直线 l 的斜率为 $a+1$,在 y 轴上的截距为 b,所以有 $e^{x_0}=a+1$,$e^{x_0}(1-x_0)\geqslant b$,所以 $(a+1)b\leqslant e^{x_0}\cdot e^{x_0}(1-x_0)=e^{2x_0}(1-x_0)$,

设 $t(x_0)=e^{2x_0}(1-x_0)$,$x_0\in\mathbf{R}$,$t'(x_0)=e^{2x_0}(1-2x_0)$,

当 $x_0\in(-\infty,\frac{1}{2})$,$t'(x_0)>0$,当 $x_0\in(\frac{1}{2},+\infty)$,$t'(x_0)<0$,

故 $t(x_0)$ 有最大值 $t(\frac{1}{2})=\frac{e}{2}$,所以 $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

(4)变更主元

解题思路:1.代特殊值缩小范围. 2.化简不等式. 3.选方法(用讨论法或者构造新函数).

例:设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上的导数为 $f'(x)$,$f'(x)$ 在区间 D 上的导数为 $g(x)$,若在区间 D 上,$g(x)<0$ 恒成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上为"凸函数",已知实数 m 是常数,$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{mx^3}{6}-\frac{3x^2}{2}$,若对满足 $|m|\leqslant2$ 的任何一个实数 m,函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上都是"凸函数",求 $b-a$ 的最大值.

解析:$f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-3x$,$g(x)=x^2-mx-3$,

令 $p(m)=g(x)=-xm+x^2-3<0$ 对 $\forall m\in[-2,2]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}p(-2)<0\\p(2)<0\end{cases}$,即转化为看作关于 m 的一次函数,利用其单调性即可解得 $-1<x<1$,

$\therefore(b-a)_{\max}=2$,

正确把问题等价转化是解题的关键.

五、函数零点问题

题型 1 判断函数零点的存在性或个数.

方法:方程法;函数图象法;转化法;零点存在性定理.

例 设 $a\in\mathbf{R}$,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax+(1-a)\ln x$. 若函数 $y=f(x)$ 有零点,求 a 的取值范围.

解析:因为 $f'(x)=\frac{(1-x)(x^2+x+1-a)}{x}$,

当 $a\leqslant1$ 时,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增,$(1,+\infty)$ 上递减,$f(x)_{\max}=f(1)=a-\frac{1}{3}$,当 $a-\frac{1}{3}\geqslant0$,即 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant1$ 时,函数 $y=f(x)$ 有零点,

当 $a>1$ 时,$f(1)=a-\frac{1}{3}>0$,$f(\sqrt{3a})<0$,

由零点存在定理,$f(x)$ 在 $(1,\sqrt{3a})$ 内有零点,从而在 $(0,+\infty)$ 内有零点.

所以当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,函数有零点.

题型 2 已知函数零点,求系数.

方法:图象法(研究函数图象与 x 轴交点的个数);方程法;转化法(由函数转化为方程,再转化为函数,研究函数的单调性)

例 函数 $f(x)=\ln x-x+1-a(x-1)^3$ 在区间 $(1,3)$ 上有极值,求实数 a 的取值范围.

解析:$y=f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有极值 $\Leftrightarrow y=f'(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有非重根,即转化为方程的根的问题,进而转化为函数零点问题,利用数形结合思想得到解决.

$f'(x)=\frac{1}{x}-1-3a(x-1)^2=0\Leftrightarrow\frac{1}{3a}=x(1-x)\in(-6,0)$,$\therefore a\in(-\infty,-\frac{1}{18})$.

六、不等式证明问题

方法 1:构造函数,研究单调性,最值,得出不等关系,有的涉及不等式的放缩.

例 已知函数 $f(x)=ax^2+kbx$,$(x>0)$ 与函数 $g(x)=ax+b\ln x$,a,b,k 为常数. 若 $g(x)$ 图象上一点 $P(2,g(2))$ 处的切线方程为:$x-2y+2\ln2-2=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$(x_1<x_2)$ 是函数 $y=g(x)$ 的图象上两点,$g'(x_0)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,证明:$x_1<x_0<x_2$.

解:易得 $g(x)=\ln x$,$(x>0)$

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}$,$\therefore g'(x_0)=\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$,

$\therefore x_0=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_2-x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$,

$$x_0-x_1=\frac{x_2-x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}-x_1=\frac{x_2-x_1-x_1\ln\frac{x_2}{x_1}}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$$

$$=\frac{x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}(\frac{x_2}{x_1}-1-\ln\frac{x_2}{x_1}),$$

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$,则 $t>1$,令 $h(t)=t-1-\ln t$,

则 $h'(x)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}>0$,

$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$\therefore h(t)>h(1)=0$,

$\therefore x_0-x_1>0$，即 $x_0>x_1$ 同理可得 $x_2>x_0$。

综上：$x_1<x_0<x_2$。

例 已知函数 $f(x)=\ln x+mx^2$，$(m\in\mathbf{R})$.

(1)若 $m=0$，$A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$是函数 $f(x)$图象上不同的两点，且 $a>b>0$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

求证：$f'(\frac{a+b}{2})<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<f'(b)$；

(2)求证：$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析：(1)由题意知：$f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，

所以要证 $f'(\frac{a+b}{2})<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<f'(b)$，即证 $\frac{2}{a+b}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$，

要证$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$，只需证 $\ln\frac{a}{b}<\frac{a}{b}-1$，

令 $t=\frac{a}{b}$，则 $t>1$，即证 $\ln t-t+1<0$，

令 $g(t)=\ln t-t+1$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-1<0$，

$\therefore g(t)<g(1)=0$，得证，

要证$\frac{2}{a+b}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}$，只需证 $\ln\frac{a}{b}>\frac{2(\frac{a}{b}-1)}{\frac{a}{b}+1}$，

令 $t=\frac{a}{b}$，则 $t>1$，即证$(t+1)\ln t-2(t-1)>0$，

令 $h(t)=(t+1)\ln t-2t+2$，则 $h'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，$h''(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})>0$，

所以 $h'(t)>h'(1)=0$，$\therefore h(t)>h(1)=0$，得证.

综上所述：$f'(\frac{a+b}{2})<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<f'(b)$.

(2)方法 1：放缩法

由(1)可知$\frac{2}{a+b}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$，$(a>b>0)$

令 $a=n+1$，$b=n$，则有

$\frac{2}{2n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，

$\because \ln(n+1)=[\ln(n+1)-\ln n]+\cdots+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 2-\ln 1)$，

$\therefore \frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. $(n\in\mathbf{N}^*)$

方法 2：讨论法

例：已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

证明：当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}$.

解析：构造新函数，求出导函数，通过研究导函数的符号判断出函数的单调性，求出函数的最值，证得不等式.

易得 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}$，

$f(x)-\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{1-x^2}(2\ln x-\frac{x^2-1}{x})$，

记 $h(x)=2\ln x-\frac{x^2-1}{x}$，$(x>0)\Rightarrow h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}$，

所以当 $x\neq1$ 时，$h'(x)<0$，

又 $h(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$h(x)>0\Rightarrow\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$，

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)<0\Rightarrow\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$，

所以当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$f(x)-\frac{\ln x}{x-1}>0$ 即 $f(x)>\frac{\ln x}{x-1}$.

通过上述热点题型的分析，我们发现导数这部分自身的知识难度不大，但是其应用能力及与其他知识的综合能力要求较高，正是由于导数的引入，对函数的考查已不再拘泥于低次多项式函数、简单的指数函数、对数函数等，研究函数的目标也不再局限于定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性等内容，而是把高次多项式函数、分式函数、指数型函数、对数型函数以及基本初等函数的和差积商更多地作为考查对象，试题的命题往往融函数、导数、不等式、方程、甚至数列、解析几何等知识于一体，通过演绎、证明、运算、推理等理性思维，来解决单调性、极值、最值、切线、方程的根的分布、不等式的求解和证明、参数的范围等问题. 试题往往难度大，综合性强，内容、背景、方法上颇为新颖，备受命题者青睐.

基于以上思考，我认为涉及到函数与导数的问题时，要养成做题就画图的习惯，复杂问题一画图，眉目就清晰，灵感顿生，即“复杂问题，一画就灵”；同时要学会总结，善于总结，熟练掌握基本套路，尤其是“通性通法”：①切线问题抓住“切点”不放；②方程根(零点)个数问题离不开“图象”；③导数问题，函数“单调性”是主旋律，抓住了这个根本，所有问题就迎刃而解；④不等式有关的范围以及证明不等式问题，构造函数(分离构造，取差构造)是首选，抓住最值是关键，即理清思路，顺藤摸瓜，直达本质.

(作者：钱德泰，江苏省泰兴市第四高级中学)

《中学课程辅导·高考版》征稿启事

（高三版）语文

特设语言运用、古诗鉴赏、美文品鉴、佳作展评、写作例话、为文之道、素材运用、大考训练营等栏目。以上栏目要求紧扣高三学生的特点，以高三语文复习为主线，以阅读和写作为主体，着力培养学生应试解题技巧。

（高三版）数学

栏目设置同高一、高二数学，但内容要符合高考考纲及高三总复习的要求，围绕高考的考点、重点、难点展开。

（高三版）英语

阅读导航（精选体现时代特色、贴近学生生活，与高考英语命题精神相吻合的精彩时文）
题型探究（针对高考各题型的命题及特点进行解题技巧方面的指导）
单元点拨（梳理、分析、强化各单元的学习重点、难点、考点）
巩固操练（针对单元教学的重点和易错、易混淆点进行讲解及操练，注意所选题型的多样化和实效性）
名师指路（特邀名师讲解，对高考常考题型进行专项训练及技法指导）
语法点津（历年高考语法考点的归纳、总结及回顾，并辅之以专项练习）
综合检测（单元训练套题，不含听力部分）

【投稿要求】

1. 稿件要切合各年级实时教学进度，适应各年级学生的学科发展特征，语言简练、通俗易懂，少理论阐释，多实战训练；文章篇幅以两页为宜或控制在4000字以内（特殊稿件除外），忌长篇大论。
2. 稿件以讲练结合为主，突出示例分析，尽可能在文末配以相应的练习，忌光讲不练。从标题到内容上要贴近高考，突出“高考版”的特点。
3. 文章要求原创，内容严禁剽窃，文责自负，所有文章应附作者简介、工作单位、详细地址、手机号等，以备查询。
4. 文章格式：行文用宋体4号字，作者需将稿件以WORD文档形式作为附件发送至本刊各学科编辑的邮箱（文末附）。
5. 要求提前投稿，截稿日期（每月出版日期前一个月，合刊为前两个月）过后不能保证刊用，来稿15日内回复！勿一稿多投！请及时查看回复邮件并保持联络！

【高一】
zsl_zx@163.com（语文）
Lizhen-1962@163.com（数学）
853243167@qq.com（英语）

【高二】
zhujuanhua1970@163.com（语文）
jsrgygr@126.com（数学）
tzzjx99@163.com（英语）

【高三】
461831827@qq.com（语文）
jstxwwd@163.com（数学）
1085845035@qq.com（英语）

联系人：黎老师、刘老师　　联系电话：025-83345311

国内标准刊号：ISSN 1992-7711　国内统一刊号：CN14-1307/G4　邮发代号：22-310　定价：7.00元